Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2º sem. 2010/11

EXERCÍCIOS 9

1. Determine a solução geral do sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

2. Determine a solução geral do sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

3. Mostre que

   (a) $L[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1},} \quad s > 0, \ n \in \mathbb{N}_0.$ (b) $L[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a, \ a \in \mathbb{R}.$

   (b) $L[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2+a^2,} \quad s > 0, \ a \in \mathbb{R}.$ (c) $L[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2+a^2,} \quad s > 0, \ a \in \mathbb{R}.$

   (d) $L[\sinh(at)](s) = \frac{a}{s^2-a^2,} \quad s > |a|, \ a \in \mathbb{R}.$ (e) $L[\cosh(at)](s) = \frac{s}{s^2-a^2,} \quad s > |a|, \ a \in \mathbb{R}.$

4. Determine as transformadas de Laplace das funções f de $t \geq 0$ dadas pelas seguintes expressões:

   (a) $f(t) = 4\sin t \cos t + 2e^{-t}$. (b) $f(t) = t^5 + \cos(2t)$. (c) $f(t) = 2e^{3t} - \sin(5t)$.

   (d) $f(t) = e^{2t}(\sin t + \cos t)$. (e) $f(t) = (1 - H_\pi(t)) \sin t$. (f) $f(t) = (t-2)^2 e^{2(t-2)} H_2(t)$.

5. Determine as transformadas inversas de Laplace das funções F de s (consideradas em domínios adequados):

   (a) $F(s) = \frac{7}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^2-4}$. (b) $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+16}$. (c) $F(s) = \frac{12}{(s+3)^4}$.

   (d) $F(s) = \frac{s}{s^2-3s-4}$. (e) $F(s) = \frac{2}{s^3-4s^2+5s}$. (f) $F(s) = \frac{1}{s^4-1}$.

6. Determine a solução do PVI usando a transformada de Laplace:

   (a) $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}$ com $y(0) = 9$ e $y'(0) = 6$,

   (b) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh(2x)$ com $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 4$,

   (c) $y'' - 6y' + 9y = 0$ com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$,

   (d) $y'' + 4y = \cos(2x)$ com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$,

   (e) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 2 - 4x$ com $y(0) = \frac{1}{2}$ e $y'(0) = y''(0) = 0$.