Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2º sem. 2010/11

EXERCÍCIOS 8

1. Verifique que as seguintes EDO's são equações de Bernoulli, e, a seguir, resolva-as:

   (a) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$ (b) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

   (c) $y' + 2xy = 2x^3y^3$ (d) $y' = y\tan x - y^2\cos x$.

2. Mostre que uma função diferenciável sobre um intervalo fechado $[a, b]$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. com derivada limitada, satisfaz uma condição de Lipschitz neste intervalo.

3. Considere o seguinte PVI $y' = x^2 + xy, \;\; y(0) = 0$.

   (a) Determine, usando $u_0(x) = 0$ como função inicial, as aproximações sucessivas $u_n(x)$.

   (b) Mostre que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a solução existente em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4. Mostre que o PVI
$$y' = \frac{y^3e^x}{1+y^2} + x\sin y, \;\; y(0) = 1$$
   tem uma solução única sobre qualquer intervalo fechado $[a, b]$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, contendo a origem.

5. Determine a solução geral das EDO's lineares de ordem superior:

   a) $y'' - 2y' + y = e^{-x} + \sin x$
   b) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
   c) $y'' - 2y = 4x^3e^{x^2}$
   d) $y''' + y'' + y' + y = x^2 + \sin^2 x$
   e) $y^{(4)} - 2y''' - y'' = e^x$

6. (a) Mostre que o sistema de funções
$$\begin{cases} x_1(t) = & C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \\ x_2(t) = & 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
   constitui a solução geral do sistema de EDO's
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = & x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = & x_2 - 4x_1. \end{cases}$$

   (b) Partindo do sistema de EDO's e da sua solução geral, dados na alínea anterior, determine a solução particular desse sistema que satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 0, \; x_2(0) = -4$.

7. Determine duas soluções linearmente independentes do sistema
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$