

EXERCÍCIOS 7

- A razão de desintegração de uma substância radioactiva é directamente proporcional à quantidade dessa substância, i.e., se $x(t)$ é a massa da substância presente no momento t , então $\frac{dx}{dt} = -kx$, com k uma constante positiva.
 - Resolva a equação.
 - Sendo x_0 a massa da substância presente no início da contagem do tempo e T o tempo necessário para metade da substância se desintegrar, mostre que T é independente de x_0 . A T chama-se tempo de meia-vida da substância.
 - Se $x(0) = x_0$ e T é como acima, mostre que $x(t) = x_0 2^{-\frac{t}{T}}$.
 - Num dado momento há 100g da substância e após 4 horas restam 20g. Qual é a massa da substância restante após 8 horas?
 - Se ao fim de 6 horas restam 60g e 2 horas mais tarde restam 50g, qual era a massa da substância quando começou a contar o tempo?
- Considere um circuito eléctrico simples, com corrente I (função do tempo t), resistência R , indutância L e uma fonte de tensão E . Com unidades apropriadas, a corrente I satisfaz uma equação diferencial ordinária da forma

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E.$$

- Resolva a EDO quando E é constante.
 - Resolva a EDO quando $E = E_0 \sin(\omega t)$, de frequência ω , $E_0 = \text{const.}$
- Um modelo de evolução de uma população é descrito pela EDO

$$p'(t) = kp(t)(M - p(t)).$$

Presupõe-se que a razão de variação da população é proporcional (com constante de proporcionalidade $k > 0$) ao número $p(t)$ de indivíduos presentes no momento t e que $M > 0$. *Nota:* Uma solução y_0 de uma equação diferencial da forma $y' = F(y)$ diz-se *equilíbrio* se $F(y_0) = 0$.

- Resolva a equação e encontre as soluções de equilíbrio.
 - Estude o crescimento/decrescimento de uma solução $p(t)$. Para que valor tende uma solução $p(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$?
 - Como evolui uma tal população quando o número inicial de indivíduos é p_0 ?
- Um objecto de massa m é largado em queda livre. Supondo que a resistência do ar é directamente proporcional à velocidade do objecto, a velocidade $v(t)$ no momento t satisfaz a EDO

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g,$$

em que $k > 0$ é a *constante de proporcionalidade* e g a *constante gravitacional*.

- Resolva a equação.
- Encontre a solução do problema sabido que por ser largado e não lançado o objecto tem velocidade nula.
- Mostre que há um limite superior para a velocidade que o corpo em queda livre pode atingir.