Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2º sem. 2010/11

EXERCÍCIOS 2

1. Determine o intervalo e o domínio de convergência das seguintes séries de potências:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{n!}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{10^n}$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{(n!)^2 2^n}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

   (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$ (j) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ (l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)^n}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{n+1}}$

   (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-5)^n}{n^3}$ (p) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n}$

2. Mostre que a série

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

   tem por soma $f(x) = e^x$ em $\mathbb{R}$. Use este resultado para obter a expansão em série de potências das funções $\cos(x)$ e $\sin(x)$.

3. Calcule as somas das seguintes séries de potências, bem como os intervalos de convergência em que essa soma é válida:

   (a) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$

4. Calcule a expansão em série de potências das seguintes funções, sem se esquecer de indicar o respectivo intervalo de convergência:

   (a) $\ln(1+x)$ (b) $(1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (c) $\arctan x$ (d) $\arcsin x$

   (e) $\sinh x$ (f) $\cosh x$ (g) e^{-x} (h) $\sin x^2$

   (i) $\frac{1-\cos x}{x^2}$ (j) $\arctan x^2$ (l) $\frac{1+x}{1-x}$ (m) $\frac{1}{(1+x)^2}$

   (n) $\ln \frac{1-x}{1+x}$ (o) $\ln(1-x^2)$ (p) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ (q) $\int_0^x e^{-t^2} dt$

   (r) $\int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2} dt$ (s) $\int_0^x \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$