Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2º sem. 2010/11

EXERCÍCIOS 1

1. Estude as sucessões de funções com os seguintes termos gerais f_n quanto à convergência pontual e à convergência uniforme:

   (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \in [0,1]$.

   (b) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}$.

   (c) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ (i) $x \in \mathbb{R}$; (ii) $x \in [-r, r],\ r > 0$.

   (d) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}, \quad x > 1$.

2. Mostre que se $(f_n)_n$ converge pontualmente em $D \subset \mathbb{R}$ e D é um conjunto finito, então $(f_n)_n$ converge uniformemente em D.

3. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0,1]$. Mostre que

   (a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em $[0,1]$.

   (b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente em $[0,1]$.

   (c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0, \frac{1}{2}]$ e diga o que pode concluir acerca de $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

4. Considere $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

   (a) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[a,b]$ desde que $0 \notin [a,b]$.

   (b) Determine $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

   (c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0,1]$? Justifique.

5. Seja $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Verifique que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Designando por f o seu limite, verifique que, no entanto, $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para f'. Por que motivo não está esta conclusão em contradição com resultados dados nas aulas?

6. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 e^{-1} x, & x \in [0, \frac{1}{n}[\\ n\,e^{-nx}, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} .$$

   (a) Mostre que $\forall x \in]0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n\,e^{-nx}$.

   (b) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

   (c) Que conclusão pode tirar sobre a eventual convergência uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifique a sua resposta.

7. Mostre que a série $s(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x^4+k^4}$ é uniformemente convergente e que a função s é contínua em $\mathbb{R}$.

8. Considere a série $s(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$.

   (a) Mostre que se trata de uma série uniformemente convergente.

   (b) Justifique a igualdade $\int_0^1 s(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \arctan \frac{1}{k}$.

   (c) Caso seja possível, calcule $s'(x)$.

   (d) Indique o conjunto das primitivas da função s.

9. Considere a série $s(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2\sqrt{n+1}}, x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que se trata de uma série uniformemente convergente.

   (b) Justifique que s é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

   (c) Determine $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x)\,dx$.

   (d) Caso seja possível, calcule $s'(x)$.